

# תורת ההסתברות והסטטיסטיקה

פרק 38 - חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים:

### רקע:

נלמד שיטה לחישוב תוחלת ושונות של משתנה מקרי, על ידי פירוקו לסכום של משתני אינדיקטור. אינדיקטור הינו משתנה שפונקציית ההסתברות של נראית כך:

|        |     |       |
|--------|-----|-------|
| $X$    | 1   | 0     |
| $P(X)$ | $P$ | $1-P$ |

נגיד ש- $X_i$  הינו משתנה אינדיקטור כאשר:  $i=1,2,\dots,n$  ו- $X = \sum_{i=1}^n X_i$ .

ניעזר בנוסחאות תוחלת ושונות סכום משתנים מקרים כדי לחשב את התוחלת והשונות של  $X$ .

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \cdot \sum_{i < j} \text{COV}(X_i, X_j)$$

כאשר עבור משתנים אינדיקטורים מתקיים ש:

$$E(X_i) = P(X_i = 1)$$

$$V(X_i) = P(X_i = 1) \cdot P(X_i = 0)$$

$$\text{COV}(X_i, X_j) = P(X_i = 1, X_j = 1) - P(X_i = 1)P(X_j = 1)$$

### דוגמא (פתרון בהקלטה):

יוסי החליט להזמין 8 חברים למסיבת יום הולדתו. הוא הכין 8 הזמנות שעליהן רשם את השם של כל אחד מהחברים. ההזמנות הוכנסו למעטפות וחולקו באקראי ל-8 החברים. נסמן ב- $X$  את מספר ההזמנות שהגיעו לחבר הנכון. חשבו את  $E(X)$  ואת  $V(X)$ .

## שאלות:

- (1) יהיו  $X$  ו- $Y$  משתני אינדיקטורים. הוכיחו ש:
- $E(X) = P(X=1)$ .
  - $V(X) = P(X=1) \cdot [1 - P(X=1)]$ .
  - $COV(X, Y) = P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1)$ .
- (2) 400 אנשים נבחרו מכלל האוכלוסייה.
- א. חשבו את הסיכוי שביום מסוים בשנה יהיה בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 שיש לו יום הולדת.
  - ב. נגדיר את  $X_i$  משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם ביום  $i$  בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 עם יום הולדת באותו היום. חשבו את התוחלת והשונות של  $X_i$ .
  - ג. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הימים בשנה שבהם יש יום הולדת בדיוק לאחד מ-400 האנשים הללו.
- (3) 3 משחקים הוכנסו באקראי ל-5 מגרות. מגירה יכולה להכיל יותר ממשחק אחד. נסמן ב- $W$  את מספר המגרות בהן בדיוק משחק אחד. חשבו את התוחלת והשונות של  $W$  על ידי פירוק לאינדיקטורים.
- (4)  $A, B$  ו- $C$  הם שלושה מאורעות כך ש:  $P(A) = 0.3, P(B) = 0.2, P(C) = 0.1$ .
- א. המאורעות בלתי תלויים זה בזה.
  - ב.  $C \subset B \subset A$ .
  - ג.  $A, B$  ו- $C$  זרים זה לזה.
- (5) נטיל קובייה 10 פעמים. נסמן ב- $W$  את מספר התוצאות השונות שהתקבלו.
- א. מצאו את  $E(W)$ .
  - ב. מצאו את  $V(W)$ .

- (6) נסדר בשורה 6 כוסות קולה ו-4 כוסות מים. רצף של שתי כוסות נקרא "ג'נק", אם שתי הכוסות הן ברצף של קולה. נסמן ב- $X$  את מספר הרצפים מסוג "ג'נק" שיש לשתי כוסות. למשל, הסידור הבא:
- קולה, מים, קולה, מים, קולה, מים, קולה, מים, קולה, קולה,  $X = 2$ .
- חשבו את התוחלת והשונות של  $X$ .
- (7) נסדר בשורה  $n$  זוגות גרביים באקראי (בסך הכול  $2n$  גרבים). חשבו את התוחלת והשונות של מספר הזוגות מתוך  $n$  הזוגות שבהם זוג הגרביים אינם עומדים זה לצד זה.
- (8) בקייטנה 100 ילדים. מחלקים לכל ילד 2 ארטיקים מתוך 200 הארטיקים שנרכשו לקייטנה. מתוך 200 הארטיקים שנרכשו 100 בטעם תות ו-100 הם בטעם לימון. נסמן ב- $X$  את מספר הילדים שקיבלו 2 ארטיקים בטעמים שונים. נסמן ב- $Y$  את מספר הילדים שקיבלו שני ארטיקים בטעם לימון.
- א. חשבו את התוחלת והשונות של  $X$ .
- ב. בטאו את  $Y$  כפונקציה של  $X$  וחשבו את התוחלת והשונות של  $Y$ .
- ג. מהי השונות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ ?

### תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) א. 0.3667. ב. תוחלת: 0.3667, שונות: 0.2322.
- ג. תוחלת: 133.85, שונות: 88.89.
- (3) תוחלת: 1.92, שונות: 1.1136.
- (4) א. תוחלת: 0.6, שונות: 0.46. ב. תוחלת: 0.6, שונות: 1.04.
- ג. תוחלת: 0.6, שונות: 0.24.
- (5) א. 5.03. ב. 0.568.
- (6) תוחלת: 3, שונות:  $\frac{2}{3}$ .
- (7) תוחלת:  $n-1$ , שונות:  $1 - \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2(2n-1)}$ .
- (8) א. תוחלת: 50.251, שונות: 25.126.
- ב.  $Y = -0.5X + 50$ . ג. -12.563.